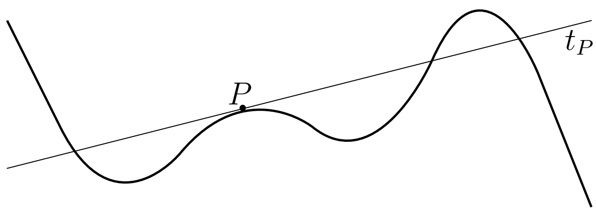
CÁLCULO L1 — NOTAS DA PRIMEIRA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula discutiremos como obter as equações das retas tangentes a uma curva planar que é o gráfico de uma função.

1. Introdução

Nesta primeira aula responderemos a seguinte questão: Como encontrar a reta que é tangente a uma curva planar em um ponto P? Denotaremos tal reta por t_P. Na terceira aula, definiremos esta reta.



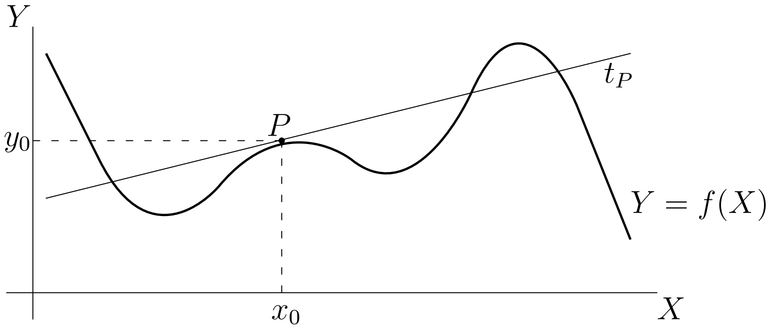
Que propriedades possui a reta tangente a uma curva em um ponto P? Descreveremos duas: uma geométrica e outra física:

- De todas as retas que passam pelo ponto P, a reta tangente t_P é a reta mais próxima da curva nas proximidades do ponto P.
- Se as forças que agem em uma partícula, tendo como trajetória esta curva, cessam quando a partícula chega em P, então a partícula passa a descrever um movimento retilíneo uniforme com trajetória t_P. Isto é, a partícula sai pela tangente à curva.

Estas duas propriedade serão estabelecidas ao longo deste curso. Note que t_P, que é a reta tangente à curva no ponto P, pode interceptar a curva em outros pontos. Em geral, t_P não é tangente à curva nestes outros pontos de interseção. Este é o caso da curva representada na figura anterior. Esta característica das retas tangentes pode parecer estranha incialmente, pois estamos habituados a considerar apenas retas tangentes às cônicas: circunferências, elipses, hipérboles e parábolas. Com algumas exceções, uma reta é tangente a uma cônica se e somente se a intercepta em um único ponto.

Iremos trabalhar com geometria analítica para encontrar retas tangentes a curvas. Para simplificar nossa abordagem, vamos supor que a curva seja o gráfico de uma função f, isto é, a equação da curva será $Y = f(X)$. Caso a abscissa do ponto P seja x_0, a sua ordenada será $f(x_0)$, que denotaremos por y_0, isto é, $y_0 = f(x_0)$. Incorporamos esta notação na figura a seguir.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.



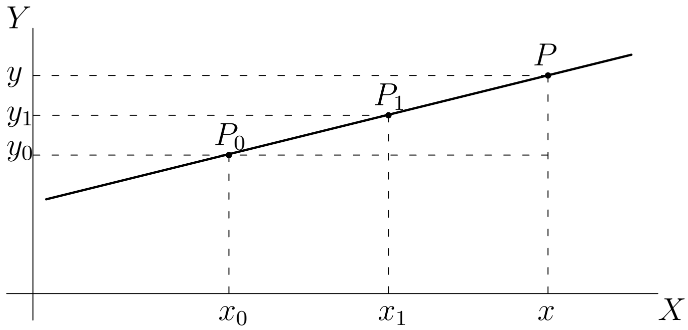
Na próxima seção recordaremos como obter a equação de uma reta.

2. Equação de uma reta

Uma reta fica completamente determinada caso sejam conhecidos dois de seus pontos. Suponha que uma reta r passa pelos pontos P_0 e P_1, com $P_0 \neq P_1$, e que as coordenadas destes pontos sejam respectivamente (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Qual será a equação de r? Quando $x_0 = x_1$, temos que r é uma **reta vertical** e sua equação será

$$X = x_0.$$

Isto é, um ponto de coordenadas (X, Y) pertence à reta r se e somente se $X = x_0$. Vamos assumir que r não é uma reta vertical. Em particular, $x_0 \neq x_1$.



Necessitamos caracterizar os pontos que pertencem a reta r. Suponha que P seja um ponto com coordenadas (x, y). Note que P está em r se e somente se

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{1}$$

O lado esquedo desta identidade é um número, que será denotado por m, e é conhecido como o **coeficiente angular** da reta r, por ser a tangente do ângulo que a reta r forma com o semi-eixo positivo das abscissas, e independe das coordenadas dos pontos P_0 e P_1 escolhidos na reta r. Isto é,

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Podemos reescrever (1) como

$$y - y_0 = m(x - x_0) \tag{2}$$

Portanto, um ponto P com coordenadas (x, y) está na reta r se e somente se (2) é satisfeita.

Conseqüentemente a **equação da reta** que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m é

$$Y - y_0 = m(X - x_0)$$

Em particular, a equação da reta fica completamente determinada caso seja conhecido:

- o seu coeficiente angular e
- um de seus pontos.

Esta equação pode ser reescrita como

$$mX - Y + (y_0 - mx_0) = 0 \tag{3}$$

Exercício 1. *Encontre a equação da reta que passa pelo ponto* $(-2, 3)$ *e possui coeficiente angular igual a 3.*

Exercício 2. *Encontre a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas* $(-2, 3)$ *e* $(4, 1)$.

Quando a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$,

$$aX + bY + c = 0 \tag{4}$$

é conhecida como a **equação geral** de uma reta. Note que (4) coincide com (3) ao tomarmos $(a, b, c) = (m, -1, y_0 - mx_0)$. Isto é, a equação da reta r é desta forma. Quando $a = 0$, (4) é a equação de uma reta horizontal, pois pode ser reescrita como:

$$Y = -\frac{c}{b}$$

Quando $b = 0$, (4) é a equação de uma reta vertical, pois pode ser reescrita como:

$$X = -\frac{c}{a}$$

Vamos supor que $ab \neq 0$. Neste caso reescrevemos (4) como:

$$Y = -\frac{a}{b}\left(X + \frac{c}{a}\right)$$

Isto é, é a equação da reta com coeficiente angular $-\frac{a}{b}$ passando pelo ponto com abscissa $-\frac{c}{a}$ e ordenada 0. Logo (4) é a equação de alguma reta.

Exercício 3. *Ache o coeficiente angular da reta com equação* $2X - 5Y + 14 = 0$.

Exercício 4. *Determine o valor de* b *para o qual o ponto de coordenadas* $(b, -b)$ *pertence à reta de equação* $2X - 5Y + 14 = 0$.

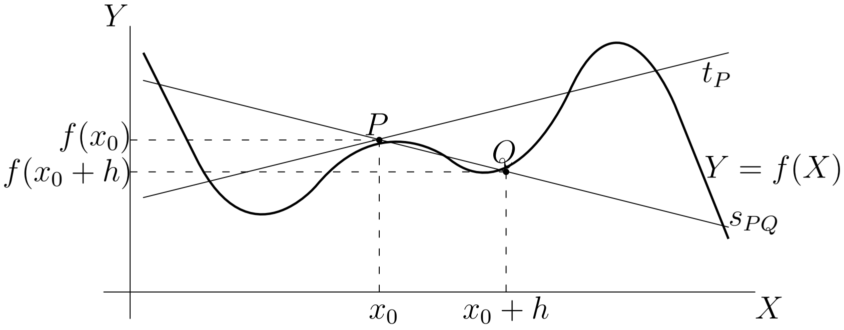
Exercício 5. *Encontre as coordenadas do ponto de interseção das retas de equações* $X + 2Y + 3 = 0$ *e* $2X - 5Y + 15 = 0$.

3. Equação da reta tangente

Na primeira parte desta aula, desejávamos encontrar a equação da reta tangente t_P ao gráfico da função f no ponto P com coordenadas (x_0, y_0), onde $y_0 = f(x_0)$. Em particular, P é um ponto de t_P, já que t_P é tangente ao gráfico de f no ponto P. Para determinarmos a equação de t_P será suficiente encontrar o seu coeficiente angular, que será denotado por m_P. Descreveremos como isto pode ser feito:

(1) Escolha um ponto auxiliar Q no gráfico de f, com $Q \neq P$. Assuma que a abscissa de Q é $x_0 + h$, para algum número real h, com $h \neq 0$. Portanto, a ordenada de Q será $f(x_0 + h)$.
(2) Seja m_{PQ} o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos P e Q. Esta reta será denotada por s_{PQ}.
(3) Quando Q se aproxima de P, a reta secante s_{PQ} se aproxima da reta tangente t_P e conseqüentemente o coeficiente angular da reta secante m_{PQ} se aproxima de m_P. Mas Q se aproxima de P se e somente se h se aproxima de 0.

(4) Portanto, m_P será o valor para o qual m_{PQ} se aproxima quando h se aproxima de 0. Utilizaremos a notação $\rightarrow$ para significar "se aproxima de". De posse desta notação, podemos reescrever este item da seguinte forma: $m_{PQ} \rightarrow m_P$ quando $h \rightarrow 0$.



Observe que

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{5}$$

é uma expressão que depende apenas de h, de x_0 e de f.

Exemplo 6. *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(X) = X^2$, que é uma parábola, no ponto de coordenadas $(1, 1)$.*

O coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função $f(X) = X^2$, passando pelos pontos com coordenadas $(1, f(1))$ e $(1+h, f(1+h))$, com $h \neq 0$, é

$$m_{PQ} = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

Fazendo $a = 1$ e $b = h$ na identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, obtemos

$$m_{PQ} = \frac{(1+2h+h^2) - 1}{h} = \frac{2h+h^2}{h}$$

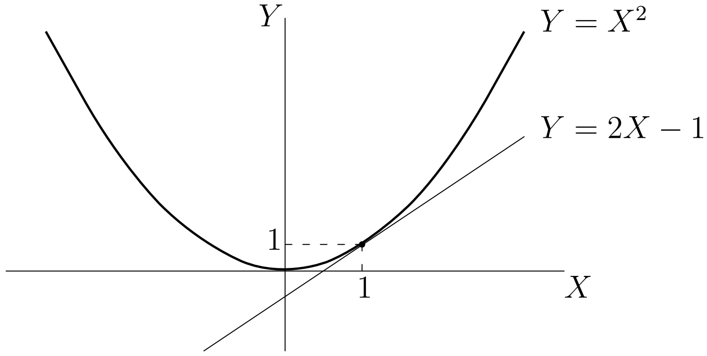
Como h multiplica todos os termos do numerador da última fração desta identidade, podemos por h em evidência. Logo

$$m_{PQ} = \frac{h(2+h)}{h}$$

Como h divide o numerador e o denominador desta fração e $h \neq 0$, podemos cancelar h e daí

$$m_{PQ} = 2 + h$$

Na figura seguinte, que ilustra este exemplo, por razões estéticas, a escala do eixo das abscissas é 3 vezes maior que a do eixo das ordenadas.



Note que $2 + h \to 2$ quando $h \to 0$. Portanto o coeficiente angular da reta tangenta à parábola de equação $Y = X^2$ no ponto $(1, 1)$ é 2. A equação desta reta é dada por

$$Y - 1 = 2(X - 1)$$

que pode ser reescrita como $Y = 2X - 1$.

Exercício 7. *Para cada um dos itens abaixo, encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P indicado.*

(i) $f(X) = X^2$ *e* $P = (-2, 4)$
(ii) $f(X) = 3X^2 - 7X + 2$ *e* $P = (2, 0)$
(iii) $f(X) = \frac{1}{X}$ *e* $P = (-1, -1)$
(iv) $f(X) = X^3 + 1$ *e* $P = (-1, 0)$

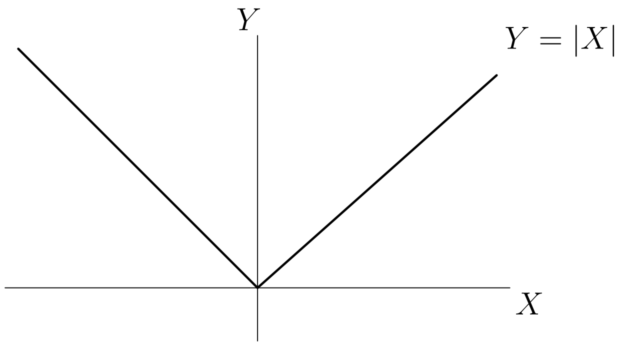
Existem funções cujos gráficos não possuem retas tangentes em alguns de seus pontos. A seguir apresentamos um exemplo de uma função com esta propriedade.

Exemplo 8. *O gráfico da função $f(X) = |X|$ não possui reta tangente no ponto de coordenadas* $(0, 0)$.

Começamos apresentando a **função modular**, que está definida para todo número real X:

$$|X| = \begin{cases} X & \text{quando } X \geq 0 \\ -X & \text{quando } X < 0 \end{cases}$$

O gráfico desta função está representado na próxima figura.



O coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função $f(X) = |X|$, passando pelos pontos com coordenadas $(0, f(0))$ e $(0 + h, f(0 + h))$, com $h \neq 0$, é

$$m_{PQ} = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Portanto,

$$m_{PQ} = \begin{cases} 1 & \text{quando } h > 0 \\ -1 & \text{quando } h < 0 \end{cases}$$

Observe que, quando $h \to 0$ por valores maiores que 0, $m_{PQ} \to 1$ e, quando $h \to 0$ por valores menores que 0, $m_{PQ} \to -1$. Conseqüentemente m_{PQ} não se aproxima de nenhum valor quando h se aproxima de 0. Isto é, gráfico da função modular possui um “bico” na origem. Qual a interpretação física deste fato?

4. Família de retas tangentes

É possível descrever todas as equações das retas tangentes a uma curva em uma única expressão dependendo de um parâmetro. Por exemplo, considere a curva $Y = X^2$, que é o gráfico da função $f(X) = X^2$. No Exemplo 6 encontramos a equação da reta tangente a esta curva no ponto de coordenadas $(1, 1)$. Agora determinaremos a equação da reta tangente a esta curva no ponto P tendo como abscissa x_0. Esta equação terá um parâmetro que será x_0. Conhecemos um ponto pelo qual a reta tangente passa, que é o ponto de tangência P e tem coordenadas (x_0, x_0^2). Necessitamos determinar apenas o coeficiente angular desta reta. Escolhemos um ponto genérico Q nesta curva, diferente de P, e calculamos o coeficiente angular m_{PQ} da reta que passa por P e Q. Caso a abscissa do ponto Q seja $x_0 + h$, por (5), temos que

$$m_{PQ} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{(x_0^2 + 2x_0h + h^2) - x_0^2}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0 + h$$

Quando $Q \to P$, isto é, $h \to 0$, temos que $m_{PQ} \to 2x_0$, que será o valor do coeficente angular da reta tangente à curva passando pelo ponto P. A equação desta reta será

$$Y - y_0 = m(X - x_0)$$

na qual (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto pelo qual esta reta passa e m é o seu coeficiente angular, ou seja, $y_0 = x_0^2$ e $m = 2x_0$. Logo

$$Y - x_0^2 = 2x_0(X - x_0)$$

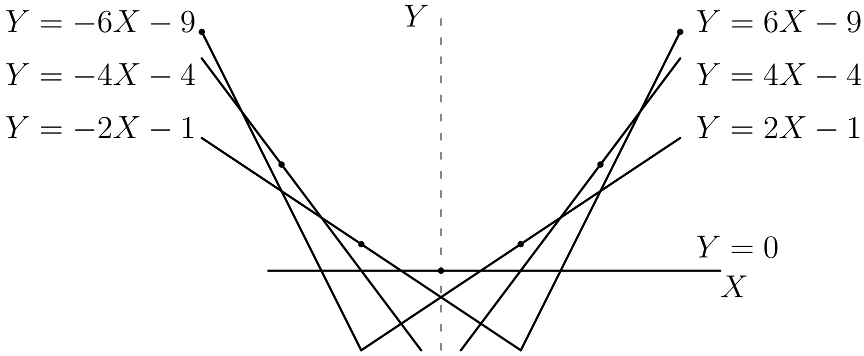
é a equação da reta tangente à curva $Y = X^2$ no ponto de coordenadas (x_0, x_0^2). Esta equação pode ser reescrita como

$$Y = 2x_0X - x_0^2 \tag{6}$$

Conseqüentemente (6) é a família das equações de todas as retas tangentes à curva $Y = X^2$. Note que esta família depende de um parâmetro que é o x_0. Na tabela seguinte listamos algumas das equações destas retas tangentes:

x_0	equação da reta
0	$Y = 0$
1	$Y = 2X - 1$
2	$Y = 4X - 4$
3	$Y = 6X - 9$
-1	$Y = -2X - 1$
-2	$Y = -4X - 4$
-3	$Y = -6X - 9$

Representamos as retas tangentes à parábola $Y = X^2$ cujas equações estão descritas na tabela acima na próxima figura — a escala no eixo das abscissas é 3 vezes maior que no das ordenadas. Em cada reta assinalamos o ponto de tangência. Note que uma destas retas coincide com o eixo das abscissas. Para não gerar confusão, o eixo das ordenadas é representado por uma linha pontilhada.



Uma parábola divide o plano em duas regiões: uma que contêm o foco da curva e que chamaremos de seu interior; a outra é chamada de seu exterior. Da ilustração acima intuímos o seguinte:

- Não existe reta tangente a esta parábola que contenha um ponto pertencente a seu interior.
- Cada ponto pertencente ao exterior desta parábola está em exatamente duas de suas retas tangentes.
- Um ponto nesta parábola pertence a uma única reta tangente a esta curva.

Iremos estabelecer estes fatos para a parábola de equação $Y = X^2$. Contudo são resultados que valem para qualquer que seja a cônica não-degenerada, exceto no caso da hipérbole, para pontos pertencentes as suas assíntotas. Por isso, a falsa idéia de que uma reta tangente a uma curva a intercepta apenas no ponto de tangência é tão generalizada.

Sejam (a, b) as coordenadas de um ponto genérico no plano. Desejamos saber quais das retas com equações descritas na família (6) contêm este ponto. Isto irá ocorrer se e somente se

$$b = 2x_0a - x_0^2 \tag{7}$$

Como a e b são parâmetros fixos, (6) pode ser reescrita como uma equação quadrática em x_0:

$$x_0^2 - 2ax_0 + b = 0 \tag{8}$$

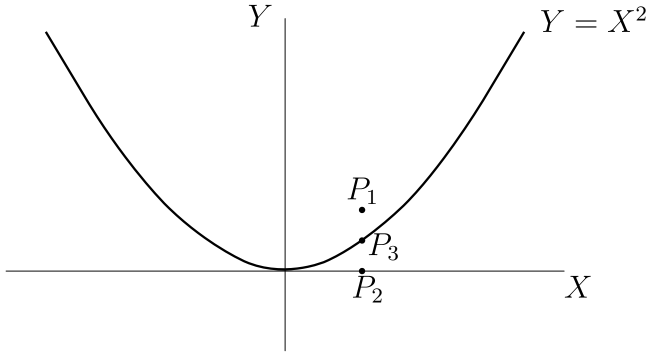
O número de soluções de (8) depende de seu discriminante que é:

$$\Delta = (-2a)^2 - 4b = 4(a^2 - b)$$

Conseqüentemente:

- Existem dois valores de x_0 para os quais (a, b) satisfaz a equação da reta descrita em (6) se e somente se $\Delta > 0$ ou seja $a^2 > b$. Isto é, (a, b) é um ponto na região exterior da parábola.
- Existe um único valor de x_0 para o qual (a, b) satisfaz a equação da reta descrita em (6) se e somente se $\Delta = 0$ ou seja $a^2 = b$. Isto é, (a, b) é um ponto sobre a parábola.
- Não existe valor de x_0 para o qual (a, b) satisfaz a equação da reta descrita em (6) se e somente se $\Delta < 0$ ou seja $a^2 < b$. Isto é, (a, b) é um ponto na região interior da parábola.

Achou muito teórico? Sim! Então vamos fazer um exemplo numérico. Sejam P_1, P_2 e P_3 pontos tendo como coordendas $(1, 2), (1, 0)$ e $(1, 1)$ respectivamente. Note que P_1, P_2 e P_3 estão no interior, no exterior e sobre a parábola de equação $Y = X^2$ respectivamente. Veja a ilustração a seguir.



Considere P_1. Neste caso $a = 1$ e $b = 2$ e (8) se torna

$$x_0^2 - 2x_0 + 2 = 0$$

Esta equação não tem solução real em x_0. Portanto, não existe reta tangente à parábola $Y = X^2$ passando por P_1. Para P_2, $a = 1$ e $b = 0$. Logo (8) se transforma em

$$x_0^2 - 2x_0 = x_0(x_0 - 2) = 0$$

Esta equação tem $x_0 = 0$ e $x_0 = 2$ como soluções. Isto é, ao substituirmos estes valores de x_0 em (6), obtemos as equações de duas retas tangentes à parábola $Y = X^2$, que são $Y = 0$ e $Y = 4X - 4$. Finalmente, quando $a = b = 1$, a equação (8) passa a ser

$$x_0^2 - 2x_0 + 1 = (x_0 - 1)^2 = 0$$

que possui apenas $x_0 = 1$ como solução. Conseqüentemente existe uma única reta tangente à parábola $Y = X^2$ passando por P_3 que tem equação $Y = 2X - 1$.

Exercício 9. *Para a hipérbole de equação*

$$Y = \frac{1}{X}$$

(i) *Determine o coeficiente angular da reta tangente no ponto de coordenadas* (x_0, y_0), *com* $x_0 y_0 = 1$.
(ii) *Ache a equação da reta tangente no ponto de coordenadas* (x_0, y_0), *com* $x_0 y_0 = 1$.
(iii) *Encontre as equações das retas tangentes que passam pelo ponto* $(-8, 3)$.
(iv) *Quando* A *e* B *são os pontos de interseção de uma reta tangente a esta hipérbole com os eixos coordenados, calcule a área do triângulo* OAB, *onde* O *é a origem do sistema cartesiano.*

5. Cônicas

Na segunda seção, estabelecemos que as soluções de um polinômio de grau 1 nas variáveis X e Y formam uma reta. O que ocorre com este conjunto quando o grau do polinômio passa a ser 2?

Quando a, b, c, d, e e f são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, o conjunto de soluções da equação

$$aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0 \tag{9}$$

pode ser:

(1) Vazio. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 + Y^2 + 1 = 0$.
(2) Um ponto. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 + Y^2 = 0$.
(3) Uma reta. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 = 0$.
(4) Um par de retas. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 - Y^2 = 0$.

(5) Uma circunferência. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 + Y^2 - 1 = 0$.
(6) Uma elipse. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 + 2Y^2 - 1 = 0$.
(7) Uma parábola. Isto ocorre, por exemplo, para $X^2 - Y = 0$.
(8) Uma hipérbole. Isto ocorre, por exemplo, para $XY = 1$.

Mais ainda, qualquer cônica é o conjunto das soluções de algum polinômio de grau 2.

É fácil mostrar que a interseção de uma reta com uma cônica pode ser 0, 1 ou 2 pontos, desde que a reta não esteja contida na cônica.

Para encontrarmos a reta tangente t_P a uma curva no ponto P, consideramos a reta secante s_{PQ} passando por P e um ponto auxiliar Q, diferente de P e também na curva. Ao aproximarmos Q de P, a reta secante s_{PQ} aproxima-se da reta tangente. No limite, é como se P fosse um ponto de interseção dupla da reta t_P com a curva. Quando esta curva é uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola, t_p intercepta esta curva em 1 ponto que, será de interseção dupla.

Quando uma reta intercepta uma circunferência, elipse, hipérbole ou parábola em um único ponto, esta reta será tangente a esta cônica, já que este ponto será de interseção dupla, exceto quando esta cônica é uma parábola e a reta é paralela ao seu eixo.

6. Respostas dos exercícios

1. $3X - Y + 9 = 0$ **2.** $X + 3Y + 7 = 0$ **3.** $\frac{2}{5}$ **4.** -2 **5.** $(-5, 1)$ **7.** (i) $4X + Y + 4 = 0$ (ii) $5X - Y - 10 = 0$ (iii) $X + Y + 2 = 0$ (iv) $3X - Y + 3 = 0$ **9.** (i) $-\frac{1}{x_0^2}$ ou $-\frac{y_0}{x_0}$ (ii) $X + x_0^2 Y - 2x_0 = 0$ ou $y_0 X + x_0 Y - 2 = 0$ (iii) $X + 4Y - 4 = 0$ e $9X + 16Y + 24 = 0$ (iv) 2

Conteúdo da primeira aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos