CÁLCULO L1 — NOTAS DA TERCEIRA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula introduziremos o conceito de derivada e a definição de uma reta tangente ao gráfico de uma função. Também apresentaremos as primeiras regras para derivação. Ao final da aula, saberemos como encontrar a reta tangente em qualquer ponto pertencente ao gráfico de uma função polinomial.

1. Definição da derivada de uma função

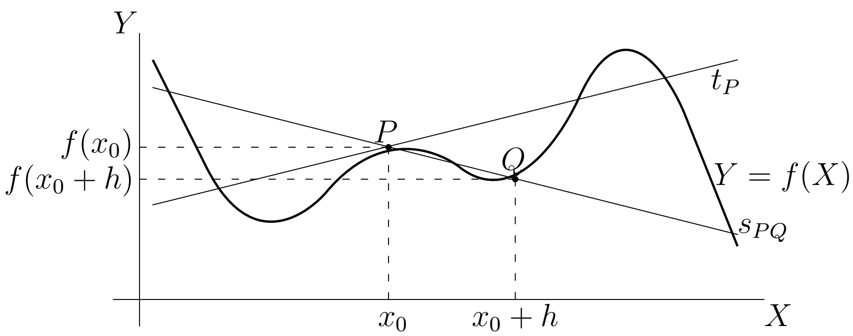
Na primeira aula, consideramos o limite dos coeficientes angulares de retas passando por dois pontos pertencentes ao gráfico de uma função quando um deles se aproxima do outro, que é mantido fixo.

Sejam P e Q diferentes pontos do gráfico de uma função f com coordenadas $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ respectivamente, para algum $h \neq 0$. A reta s_{PQ}, que passa por P e Q, tem coeficiente angular m_{PQ} satisfazendo

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Quando Q se aproxima de P, que é mantido fixo, temos que h se aproxima de 0. Caso m_{PQ} se aproxime de algum valor, diremos que este valor é a **derivada** de f em x_0 e é denotada por $f'(x_0)$. Isto é,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$



Diremos que a derivada de f em x_0 é o coeficiente angular da reta tangente t_P ao gráfico da função f no ponto P, de coordenadas $(x_0, f(x_0))$. Em outras palavras, a **reta tangente** ao gráfico da função f no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ é definida como a reta cuja equação é dada por

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0) \tag{2}$$

Se a derivada de f não existe em x_0, então a reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$ também não existe.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

No primeiro capítulo calculamos a derivada de $f(X) = X^2$. Neste caso, $f'(x_0) = 2x_0$. Como x_0 pode assumir qualquer valor, podemos ver x_0 como uma "variável" e f' como uma função na "variável" x_0. Retornando para a variável X, temos que $f'(X) = 2X$ quando $f(X) = X^2$. Em geral, (1) pode ser reescrita como

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} \tag{3}$$

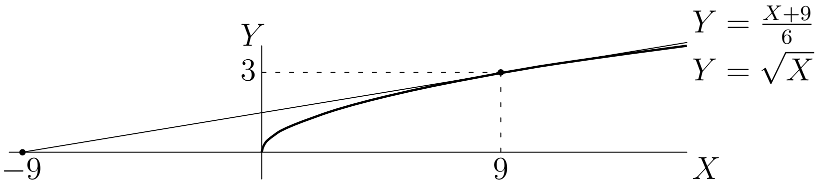
quando a "variável" x_0 é substituída pela variável X. Esta abordagem pode gerar alguma confusão no início. É comum que alguns estudantes cometam o erro que iremos apresentar a seguir.

Erro freqüente 1. *Considere a seguinte questão: Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(X) = X^2$ no ponto de coordenadas $(2,4)$? Ao responderem tal questão, alguns estudantes calculam $f'(X) = 2X$ e afirmam que a equação desta reta é $Y - 4 = 2X(X-2)$. Note que esta equação não é a de uma reta. O coeficiente angular tem de ser um número. Não pode ser $2X$. O coeficiente angular desta reta é $f'(2) = 4$. Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(X) = X^2$ no ponto de coordenadas $(2,4)$ é $Y - 4 = 4(X-2)$.*

Vamos fazer um exemplo antes do início da apresentação das regras de derivação.

Exemplo 2. *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(X) = \sqrt{X}$ que passa pelo ponto de coordenadas $(-9,0)$.*

Na figura abaixo, ilustramos o gráfico de f e a única reta tangente a este gráfico passando pelo ponto de coordenadas $(-9,0)$. Note que perto do ponto de tangência, que tem coordenadas $(9,3)$, o gráfico da função fica muito próximo da reta tangente, chegando a se confundir na representação gráfica.



Na tabela apresentada a seguir tabulamos $f(X) = \sqrt{X}$ e $g(X) = \frac{X+9}{6}$ para alguns valores de X próximos de 3. Verificamos que $f(X)$ e $g(X)$ estão muito próximos.

X	8,000	8,400	8,800	9,000	9,200	9,600	10,000
$f(X)$	2,828	2,898	2,966	3,000	3,033	3,098	3,162
$g(X)$	2,833	2,900	2,967	3,000	3,033	3,100	3,167

Necessitamos considerar todas as retas tangentes ao gráfico desta função. Iniciamos calculando o coeficiente angular de cada uma destas retas:

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{X+h} - \sqrt{X}}{h}$$

Note que este limite é do "tipo $\frac{0}{0}$", que foram considerados na última aula. Eliminamos a indeterminação multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador:

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{X+h} - \sqrt{X})(\sqrt{X+h} + \sqrt{X})}{h(\sqrt{X+h} + \sqrt{X})} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{X+h})^2 - (\sqrt{X})^2}{h(\sqrt{X+h} + \sqrt{X})}$$

Para obtermos a última igualdade acima, utilizamos a identidade $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, com $a = \sqrt{X+h}$ e $b = \sqrt{X}$. Simplificando a expressão, chegamos à

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{(X+h)-X}{h(\sqrt{X+h}+\sqrt{X})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{X+h}+\sqrt{X})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{X+h}+\sqrt{X}}$$

Quando $h \to 0$, temos que $\sqrt{X+h} \to X$ e daí

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{X+h}+\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{X}}$$

Note que a derivada não existe quando $X = 0$, que é um valor no domínio de f. Isto ocorre porque no ponto de coordenadas $(0,0)$ a reta tangente ao gráfico de f é vertical e tem equação $X = 0$, pois o gráfico de f é a parte da parábola de equação $X = Y^2$ contida no primeiro quadrante.

Agora iremos considerar todas as retas tangentes ao gráfico da função f e verificar qual passa pelo ponto de coordenadas $(-9,0)$. Seja a a abscissa de um ponto genérico no gráfico de f, com $a \geq 0$. Sua ordenada será $f(a) = \sqrt{a}$. O coeficente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(a, f(a))$ é igual a $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Portanto, obtemos a equação desta reta tangente substituindo em

$$Y - f(a) = f'(a)(X-a)$$

os valores descritos acima e chegamos à

$$Y - \sqrt{a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(X-a)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $2\sqrt{a}$, temos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a}(Y-\sqrt{a}) &= X-a \\ 2\sqrt{a}Y - 2a &= X-a \\ 2\sqrt{a}Y &= X+a \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa a é:

$$X - 2\sqrt{a}Y + a = 0 \tag{4}$$

Necessitamos determinar quais as retas desta família que passam pelo ponto de coordenadas $(-9,0)$. Isto ocorre se e somente se $(-9,0)$ satisfaz sua equação. Ao substituirmos $(-9,0)$ em (6), obtemos

$$-9 + a = 0$$

e daí $a = 9$. A equação da reta tangente é $X - 6Y + 9 = 0$. As coordenadas do ponto de tangência são $(9,3)$.

Exercício 3. *Decida sobre a veracidade de cada uma das sentenças abaixo sobre as retas tangentes à curva de equação* $Y = \sqrt{X}$.

(i) *A equação da reta tangente no ponto de coordenadas* $(1,1)$ *é* $Y = \frac{X+1}{2}$
(ii) *A equação da reta tangente no ponto de coordenadas* $(25,5)$ *é* $20Y = 4X + 10$
(iii) *Não existe reta tangente no ponto de coordenadas* $(90000000000, 300000)$
(iv) *Nenhuma reta tangente passa pelo ponto de coordenadas* $(5,0)$
(v) *Existem duas retas tangentes passando pelo ponto de coordenadas* $(8,8)$
(vi) *Existem duas retas tangentes passando pelo ponto de coordenadas* $(a,3)$ *se e somente se* $0 \leq a < 9$.

Exercício 4. *Encontre as equações das retas tangentes à curva de equação* $Y = X^4 - 18X^2 + 81$, *indicando seus pontos de tangência, que são horizontais. Estas retas interceptam a curva em algum outro ponto?*

2. As primeiras regras: derivando polinômios

Calcular a derivada de uma função, como foi feito para $f(X) = \sqrt{X}$ no Exemplo 2, pode se tornar muito complexo. Por este motivo, estabeleceremos regras que permitem o cálculo da derivada de forma mecânica. Estas regras podem ser facilmente implementadas para derivar qualquer função elementar. Isto é feito em qualquer programa de computação algébrica. A próxima regra nos diz que a derivada de uma função constante é sempre zero.

Regra 5. *Se* $f(X) = c$, *onde* c *é um número real, então* $f'(X) = 0$.

De fato, por definição

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

A segunda regra de derivação é muito importante. Permite o cálculo da derivada de uma potência com expoente natural. Para estabelecer a regra, necessitamos da seguinte identidade a respeito de diferenças de n-potências:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i}b^i \tag{5}$$

Esta identidade é facilmente estabelecida ao multiplicarmos por $a - b$ ambos os lados porque

$$\begin{aligned} a(a^{n-1} + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + b^{n-1}) &= a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^{n-i}b^i + \cdots + ab^{n-1} \\ -b(a^{n-1} + \cdots + a^{n-1-i}b^i + \cdots + b^{n-1}) &= \quad - a^{n-1}b - \cdots - a^{n-i}b^i - \cdots - ab^{n-1} - b^n \end{aligned}$$

Regra 6. *Se* $f(X) = X^n$, *onde* n *é um inteiro positivo, então* $f'(X) = nX^{n-1}$.

Sabemos que

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(X+h)^n - X^n}{h} \tag{6}$$

Se $a = X + h$ e $b = X$, então

$$\frac{(X+h)^n - X^n}{h} = \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

Por (5), temos que

$$\frac{(X+h)^n - X^n}{h} = \sum_{i=0}^{n-1} (X+h)^{n-1-i} X^i$$

Substituindo esta identidade em (6), chegamos à

$$f'(X) = \lim_{h\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (X+h)^{n-1-i} X^i$$

Como o limite da soma é a soma dos limites, temos que

$$f'(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{h\to 0} (X+h)^{n-1-i} X^i$$

Mas o limite do produto é o produto dos limites. Portanto,

$$f'(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\lim_{h\to 0} X + h\right)^{n-1-i} \left(\lim_{h\to 0} X\right)^{i}$$

Como $X + h \to X$ e $X \to X$, quando $h \to 0$, temos que

$$f'(X) = \sum_{i=0}^{n-1} X^{n-1-i} X^i = \sum_{i=0}^{n-1} X^{(n-1-i)+i} = \sum_{i=0}^{n-1} X^{n-1} = nX^{n-1}$$

Esta regra é uma máquina de produzir derivadas como pode ser observado na tabela apresentada a seguir.

$f(X)$	$f'(X)$
X	1
X^2	$2X$
X^3	$3X^2$
X^4	$4X^3$
X^5	$5X^4$

Usaremos esta regra no próximo exemplo.

Exemplo 7. *Encontre a equação da reta tangente à curva de equação* $Y = X^3$ *no ponto com coordenadas* $(-2, -8)$.

Esta curva é o gráfico da função $f(X) = X^3$. Pela Regra 6, temos que $f'(X) = 3x^2$. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa -2 é $f'(-2) = 12$. A equação de uma reta que passa pelo ponto de coordenadas (x_0, y_0) e tem coeficiente angular m é

$$Y - y_0 = m(X - x_0)$$

Ao fazermos $x_0 = -2, y_0 = -8$ e $m = 12$, obtemos

$$Y + 8 = 12(X + 2)$$

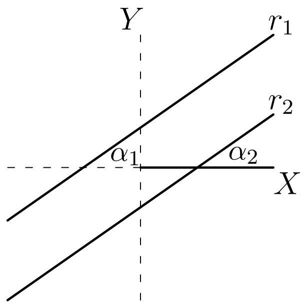
que pode ser reescrita como $Y = 12X + 16$.

Exemplo 8. *Determine as equações das retas tangentes à curva de equação* $Y = X^5$ *que são paralelas a reta com equação* $16Y - 5X + 14 = 0$.

As seguintes afirmações são equivalentes e caracterizam retas paralelas, que não são verticais, em termos de seus coeficientes angulares.

- As retas r_1 e r_2 são paralelas.
- Os ângulos α_1 e α_2 formados respectivamente por r_1 e r_2 com o semi-eixo positivo das abscissas são congruentes.
- $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$
- As retas r_1 e r_2 possuem o mesmo coeficiente angular.

A equivalência entre a segunda e a terceira afirmação segue porque $0 \le \alpha_i < \pi$, com $\alpha_i \neq \frac{\pi}{2}$, para i igual a 1 ou 2 — neste curso os ângulos são medidos sempre em radianos. Ilustramos esta situação na próxima figura, na qual representamos os eixos coordenados tracejados, exceto o semi-eixo positivo das abscissas.



Agora que caracterizamos retas paralelas em termos de seus coeficientes angulares, podemos retornar ao Exercício 8. Reescrevemos a equação da reta dada neste exercício como

$$Y = \frac{5}{16}X - \frac{7}{8}$$

Logo seu coeficiente angular é igual a $\frac{5}{16}$. Portanto, necessitamos determinar todas as retas tangentes à curva de equação $Y = X^5$ que possuem coeficiente angular igual a $\frac{5}{16}$. Como esta curva é o gráfico da função $f(X) = X^5$, o coeficiente angular da reta tangente no ponto de coordenadas $(X, f(X))$ é igual a $f'(X)$. Pela Regra 6, $f'(X) = 5X^{5-1} = 5X^4$. Conseqüentemente obtemos a equação

$$5X^4 = \frac{5}{16}$$

Logo $X = \frac{1}{2}$ ou $X = -\frac{1}{2}$. Como a equação da reta tangente ao gráfico de uma função f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0)$$

obtemos as equações das retas tangentes requisitadas neste exercício substituindo x_0 por cada um dos dois valores de X obtidos. Chegamos à

$$Y - \frac{1}{32} = \frac{5}{16}\left(X - \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad Y + \frac{1}{32} = \frac{5}{16}\left(X + \frac{1}{2}\right)$$

que podem ser reescritas como

$$16Y - 5X + 2 = 0 \quad \text{e} \quad 16Y - 5X - 2 = 0$$

Exercício 9. *Considere a curva de equação* $Y = X^3$

(i) *Encontre a equação da reta tangente a esta curva no ponto de coordenadas* (a, a^3), *para um número real* a.
(ii) *Caso existam, determine as equações das retas tangentes a esta curva que são paralelas a reta de equação* $9X - 3Y + 5 = 0$
(iii) *Caso existam, determine as equações das retas tangentes a esta curva que são paralelas a reta de equação* $3X + 4Y - 19 = 0$
(iv) *Encontre as equações das retas tangentes a esta curva que passam pelo ponto de coordenadas* $(-2, 0)$

As duas próximas regras serão estabelecidas simultaneamente.

Regra 10. *Se* $r(X) = f(X) + g(X)$, *então* $r'(X) = f'(X) + g'(X)$

Isto é, a derivada da soma é a soma das derivadas.

Regra 11. *Se* $r(X) = cg(X)$, *para um número real* c, *então* $r'(X) = cg'(X)$

Isto é, a derivação comuta com a multiplicação por uma constante.

Para um número real a, considere

$$r(X) = af(X) + cg(X)$$

Vamos mostrar que

$$r'(X) = af'(X) + cg'(X) \tag{7}$$

Obtemos a Regra 10 tomando $a = c = 1$ porque, neste caso, $r(X) = f(X) + g(X)$. Já para estabelecermos a Regra 11 basta tomarmos $a = 0$.

Agora, mostraremos (7). Por definição,

$$r'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{r(X+h) - r(X)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[af(X+h) + cg(X+h)] - [af(X) + cg(X)]}{h}$$

O numerador da fração à direita nesta expressão pode ser reescrita de forma que

$$\begin{aligned} r'(X) &= \lim_{h\to 0} \frac{a[f(X+h) - f(X)] + c[g(X+h) - g(X)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{a[f(X+h) - f(X)]}{h} + \frac{c[g(X+h) - g(X)]}{h} \right\} \end{aligned}$$

Ao usarmos que o limite da soma é a soma dos limites, concluímos que

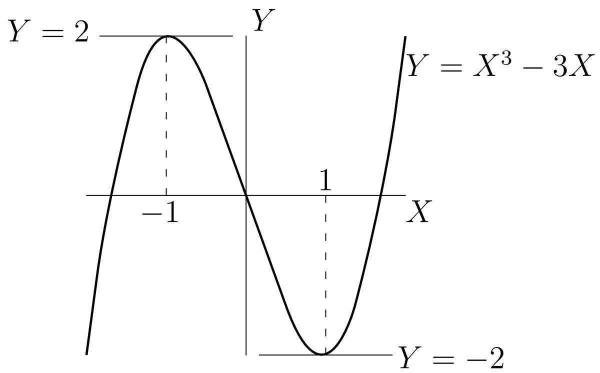
$$r'(X) = \lim_{h\to 0} \frac{a[f(X+h) - f(X)]}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{c[g(X+h) - g(X)]}{h}$$

Mas o limite do produto é o produto dos limites

$$r'(X) = \lim_{h\to 0} a \lim_{h\to 0} \frac{f(X+h) - f(X)}{h} + \lim_{h\to 0} c \lim_{h\to 0} \frac{g(X+h) - g(X)}{h}$$

Desta identidade temos (7).

Exemplo 12. *Encontre as equações das retas tangentes à curva dada pela equação $Y = X^3 - 3X$ que são horizontais, indicando seus pontos de tangência.*



A curva de equação $Y = X^3 - 3X$ é o gráfico da função $h(X) = X^3 - 3X$. Podemos decompor $h(X)$ como a soma de duas funções $f(X) = X^3$ e $g(X) = -3X$. Pela Regra 10, temos que $h'(X) = f'(X) + g'(X)$. Pela Regra 6, $f'(X) = 3X^2$. Pela Regra 11, $g'(X)$ é igual a -3 vezes a derivada de X, que pela Regra 6, é igual a 1. Portanto, $g'(X) = -3$. Logo $h'(X) = 3X^2 - 3$. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h no ponto de coordenadas $(X, h(X))$ é $h'(X)$ e esta reta é horizontal quando seu coeficiente angular for 0. Portanto,

$$h'(X) = 3X^2 - 3 = 0$$

e daí $X = 1$ ou $X = -1$. Como $h(1) = -2$ e $h(-1) = 2$, as retas tangentes horizontais a esta curva são:

- $Y = 2$ que é tangente no ponto de coordenadas $(-1, 2)$
- $Y = -2$ que é tangente no ponto de coordenadas $(1, -2)$

Estas retas estão representadas na figura anterior.

Exercício 13. *Encontre a derivada de cada uma das funções descritas a seguir:*

(i) $a(X) = 2X^2 - 5X + 1$
(ii) $b(X) = X^4 - 3X^3 + 5$
(iii) $c(X) = -X^5 + 4X^2 + 9$
(iv) $d(X) = (X - 1)(X + 1)(X + 2)$
(v) $e(X) = X^2 + 5\sqrt{X}$
(vi) $f(X) = (2X + 1)^5$

Exercício 14. *Para cada um dos itens a seguir, encontre a equação da reta tangente à curva de equação dada no ponto cujas coordenadas são indicadas.*

(i) $Y = 2X^2 - X + 1$ *e* $(-1, 4)$
(ii) $Y = X^3 + 5\sqrt{X}$ *e* $(1, 6)$
(iii) $Y = X^4 - 2X^2 + 4$ *e* $(-1, 3)$

Exercício 15. *Em cada um dos itens a seguir, são dadas as equações de uma curva e de uma reta respectivamente. Quando existirem, determine as retas tangentes a esta curva que são paralelas a reta com equação dada. Neste caso, indique os pontos de tangência.*

(i) $Y = 3X^2 + 4X - 2$ *e* $4X + 2Y - 9 = 0$
(ii) $Y = 4X^5 + 5X^4$ *e* $Y - 17 = 0$
(iii) $Y = 3X^5 + 5X^3$ *e* $X + Y - 5 = 0$

As Regras 5, 6, 10 e 11 possibilitam o calculo da derivada de qualquer função polinomial. De fato, caso

$$f(X) = a_nX^n + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$$

temos que

$$f'(X) = na_nX^{n-1} + \cdots + 2a_2X + a_1 = \sum_{i=1}^{n} ia_iX^{i-1}$$

3. Uma interpretação física

Suponha que a trajetória de uma partícula seja o eixo da abscissas. Em cada instante do tempo t, a particula ocupa um posição $x(t)$. A velocidade média da partícula entre os tempos $t = t_0$ e $t = t_1$ é dada por

$$\frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

A velocidade será negativa quando $x(t_1) < x(t_0)$ e positiva quando $x(t_1) > x(t_0)$. Quando $t_1 \to t_0$, a velocidade média se aproxima da velocidade instatânea da partícula no instante t_0. Isto é, a derivada de $x(t)$ no instante t_0

$$x'(t_0) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

é a velocidade instantânea da partícula em t_0. Se $x'(t_0) > 0$, então o vetor velocidade tem o mesmo sentido que o do eixo das abscissas. Se $x'(t_0) < 0$, então o vetor velocidade tem o sentido contrário ao do eixo das abscissas. Isto é, o sinal da derivada dá o sentido do vetor velocidade, já que a direção é o eixo das abscissas.

Caso $v(t)$ e $a(t)$ representem respectivamente a velocidade e a aceleração da partícula no instante t, temos que

$$v(t) = x'(t)$$

De maneira análoga, podemos estabelecer que

$$a(t) = v'(t)$$

porque a aceleração é a taxa de variação da velocidade com relação ao tempo. Dizemos que a aceleração é a derivada segunda da posição e denotamos isto por

$$a(t) = x''(t)$$

Exemplo 16. *Em um instante t, uma partícula ocupa a posição $x(t) = 5t^2 + 20t - 100$. Qual é a velocidade e a aceleração desta partícula no instante t.*

Temos que

$$v(t) = x'(t) = 10t + 20 \quad \text{e} \quad a(t) = v'(t) = x''(t) = 10$$

Podemos interpretar esta situação da seguinte forma: um objeto é atirado de uma altura de 100 m do solo, com uma velocidade inicial de 20 m/s em um planeta cuja aceleração gravitacional é próxima da nossa, isto é, $10\,\mathrm{m/s^2}$

Em geral, para uma função f, a derivada de f' é dita a **derivada segunda** de f e é denotada por f''; a derivada de f'' é dita **a derivada terceira** de f, sendo representada por f'''; e assim por diante.

Exemplo 17. *Calcule $f''''(X)$ para $f(X) = X^3 - 5X^2 + 4X + 9$*

Temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= X^3 - 5X^2 + 4X + 9 \\ f'(X) &= 3X^2 - 10X + 4 \\ f''(X) &= 6X - 10 \\ f'''(X) &= 6 \\ f''''(X) &= 0 \end{aligned}$$

Como não é prático usar a notação para a n-ésima derivada de uma função f através do apostrofo repetido n vezes após o f, representa-se tal derivada apenas por $f^{(n)}(X)$. Isto pode ocorrer a partir de $n = 3$. Logo $f^{(4)}(X)$ é usada no lugar de $f''''(X)$

4. Respostas dos exercícios

3. (i) V (ii) F (a equação é $10Y = X + 25$) (iii) F (existe com equação $X - 600000Y + 90000000000 = 0$) (iv) V (v) V (vi) V **4.** $Y = 81$ que é tangente em $(0, 81)$ e $Y = 0$ que é tangente em $(3, 0)$ e $(-3, 0)$; $Y = 0$ só intercepta o gráfico nos dois pontos de tangência e $Y = 81$ também intercepta nos pontos com coordenadas $(3\sqrt{2}, 81)$ e $(-3\sqrt{2}, 81)$ **9.** (i) $Y = 3a^2X - 2a^3$ (ii) $Y = 3X - 2$ e $Y = 3X + 2$ (iii) não existem (iv) $Y = 0$ e $Y = 27X + 54$ **13.** (i) $a'(X) = 4X - 5$ (ii) $b'(X) = 4X^3 - 9X^2$ (iii) $c'(X) = -5X^4 + 8X$ (iv) $d'(X) =$

$3X^2 + 4X - 1$ (v) $e'(X) = 2X + \frac{5}{2\sqrt{X}}$ (vi) $f'(X) = 160X^4 + 320X^3 + 240X^2 + 80X + 10$ **14.** (i) $Y + 5X + 1 = 0$ (ii) $2Y - 11X - 1 = 0$ (iii) $Y = 3$ **15.** (i) $Y + 2X + 5 = 0$ em $(-1, -3)$ (ii) $Y = 0$ em $(0, 0)$ e $Y = 1$ em $(-1, 1)$ (iii) não existem

Conteúdo da terceira aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos