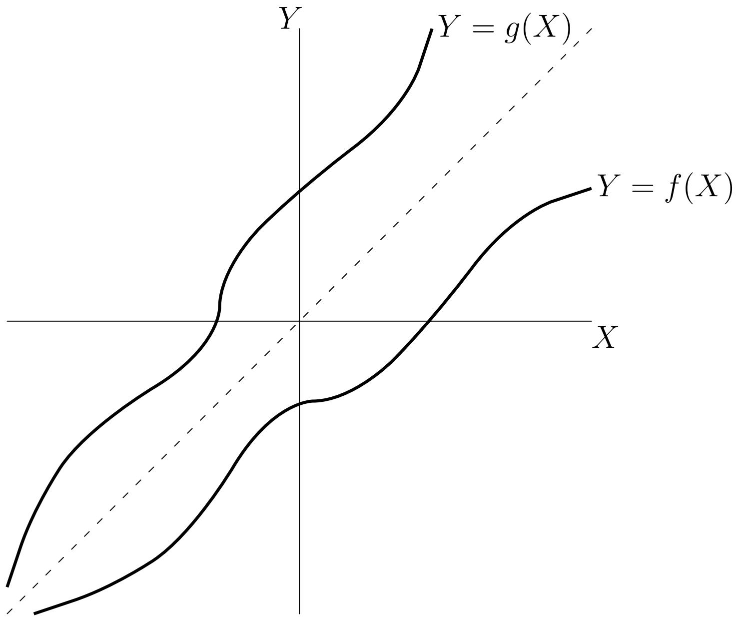
CÁLCULO L1 — NOTAS DA OITAVA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, calculamos a derivada da função inversa e aplicamos este resultdo para as funções inversas das trigonométricas.

1. A função inversa e sua derivada

Diremos que g é a **função inversa** de uma função f quando $f \circ g$ e $g \circ f$ são ambas funções identidades. Portanto, $Y = f(X)$ se e somente se $X = g(Y)$. Isto é, g desfaz o que f fez. Em particular, o ponto de coordenadas (X, Y) pertence ao gráfico de f se e somente se o ponto de coordenadas (Y, X) pertence ao gráfico de g. Conseqüentemente o gráfico de g é o simétrico do de f com relação a reta com equação $Y = X$, que é a bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.



Note que f é a função inversa de g. Mais ainda:

- Ambas f e g são funções bijetivas.
- O domínio de f passa a ser o contra-domínio de g.
- O contra-domínio de f tansforma-se no domínio de g.

As seguintes relações entre uma função e sua inversa serão utilizadas para encontrar a derivada da função inversa.

$$(1)\qquad \begin{aligned} (f \circ g)(X) = f(g(X)) = X \quad &\text{para todo } X \text{ no contra-domínio de } f \\ (g \circ f)(X) = g(f(X)) = X \quad &\text{para todo } X \text{ no domínio de } f \end{aligned}$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Em geral, uma função não possui inversa. Uma função possui uma inversa se e somente se é bijetiva. É sempre possível reduzir o domínio e o contra-domínio de uma função de forma que sua restrição passe a ser bijetiva e conseqüentemente possua inversa. Isto será feito para as funções trigonométricas que claramente não são bijetivas, pois são periódicas e conseqüentemente não são injetivas.

Exercício 1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que possui inversa g. Decida sobre a veracidade de cada uma das sentenças a seguir:*

(i) *Se f é crescente, então g é crescente.*
(ii) *Se f é decrescente, então g é crescente.*
(iii) *Se f é ímpar, então g é ímpar.*
(iv) *A função f não pode ser par.*

2. Derivando potências racionais

Para um número natural n, considere a n-ésima potência de um número real X, isto é, X^n. Se $f(X) = X^n$, então

(i) f é uma função par quando n é par, digamos $n = 2k$, porque

$$f(-X) = (-X)^n = (-X)^{2k} = \left[(-X)^2\right]^k = \left[X^2\right]^k = X^{2k} = X^n = f(X)$$

(ii) f é uma função ímpar quando n é ímpar, digamos $n = 2k+1$, porque

$$f(-X) = (-X)^n = (-X)(-X)^{2k} = (-X)X^{2k} = -X^{2k+1} = -f(X)$$

Portanto, o gráfico de f é simétrico com relação ao eixo das ordenadas, quando n é par, ou a origem, quando n é ímpar. Note que f é uma função crescente no intervalo $[0, +\infty)$, isto é,

$$f(a) < f(b) \text{ quando } 0 \leq a < b$$

Logo

(i) f é uma bijeção dos reais quando n é ímpar.
(ii) f é uma bijeção dos reais não-negativos quando n é par.

Com esta restrição do domínio e do contra-domínio de f, quando n é par, f possui uma função inversa g. Substituindo $f(X)$ por X^n em (1) temos que

$$\begin{aligned} [g(X)]^n &= X \quad \text{para todo } X \text{ no contra-domínio de } f \\ g(X^n) &= X \quad \text{para todo } X \text{ no domínio de } f \end{aligned} \tag{2}$$

Diremos que $g(X)$ é a **raiz n-ésima** de X e a denotamos por $\sqrt[n]{X}$ ou que é a **$\frac{1}{n}$-ésima potência** de X sendo também representada por $X^{\frac{1}{n}}$.

Quando r é um número racional, definiremos a r-ésima potência de um número real não-negativo X como descrito a seguir. Escreva r como $\frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros relativamente primos, com n positivo. Se $m \geq 0$, então

$$X^r = \left(X^{\frac{1}{n}}\right)^m \tag{3}$$

Se $m < 0$, então

$$X^r = \frac{1}{\left(X^{\frac{1}{n}}\right)^{-m}} \tag{4}$$

Fica como exercício para o leitor estabelecer a seguinte propriedade, na qual r e s são números racionais e X é um número real positivo,

$$X^r X^s = X^{r+s}$$

Regra 2. *Para um número racional r, se $g(X) = X^r$, então*

$$g'(X) = rX^{r-1}$$

Primeiro estabeleceremos este fato quando r é um inteiro negativo, digamos $r = -n$, para um natural n. Por definição

$$g(X) = \frac{1}{X^n}$$

Pela regra do quociente, temos que

$$g'(X) = \frac{0X^n - 1(nX^{n-1})}{(X^n)^2} = \frac{-nX^{n-1}}{X^{2n}} = -nX^{(n-1)-2n} = -nX^{-n-1} = rX^{r-1}$$

e a regra segue neste caso.

Agora assumiremos que $r = \frac{1}{n}$, para um número natural n. Derivando a primeira identidade em (2), temos que

$$n[g(X)]^{n-1}g'(X) = 1$$

que pode ser reescrita como

$$g'(X) = \frac{1}{n}\frac{1}{[g(X)]^{n-1}}$$

Ao substituirmos a expressão de $g(X)$ nesta identidade, temos que

$$g'(X) = \frac{1}{n}\frac{1}{\left(X^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n}\frac{1}{X^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{X^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}\frac{1}{X^{-\left(\frac{1}{n}-1\right)}} = \frac{1}{n}X^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}$$

e o resultado segue neste caso.

Seja r um número racional qualquer. Se $r = 0$, então g é uma função constante e a regra segue. Suponha que $r = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros relativamente primos, com n positivo. Pela definição

$$g(X) = \left(X^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

e pela regra da cadeia,

$$g'(X) = m\left(X^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\frac{1}{n}X^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} = \frac{m}{n}X^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}X^{\frac{m}{n}-1} = rX^{r-1}$$

e a regra segue em geral.

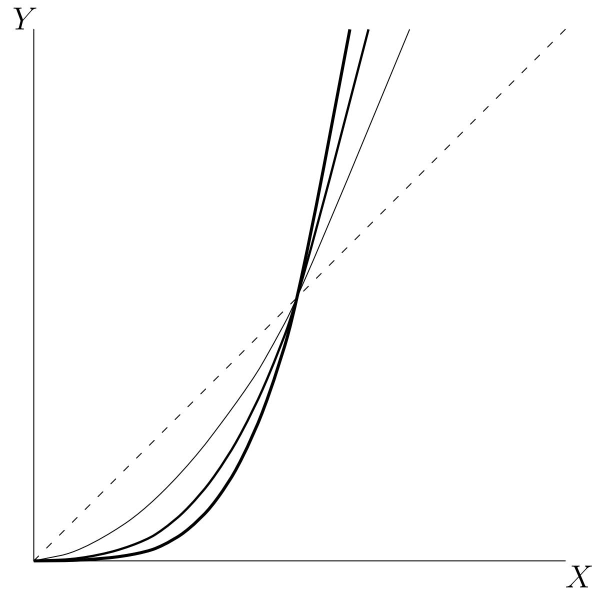
Finalizamos esta seção comparando as n-ésimas potências de X para diversos valores de expoentes n naturais. Faremos isto apenas para X positivo porque a função dada pela expressão X^n é par ou ímpar dependendo de n ser par ou ímpar respectivamente. Temos dois casos distintos. Quando $0 < X < 1$, ao multiplicarmos estas desigualdades por X^{n-1} obtemos que $0 < X^n < X^{n-1}$. Isto é, a n-ésima potência é menor que a $n-1$-ésima potência neste intervalo. Ao fazermos n percorrer os naturais, podemos aglutinar toda esta informação como

$$X > X^2 > X^3 > X^4 > \cdots > X^{n-1} > X^n > \cdots \quad \text{quando } 0 < X < 1 \tag{5}$$

Quando $X > 1$, ao multiplicarmos esta desigualdade por X^{n-1}, temos que $X^n > X^{n-1}$. Portanto, as desigualdades em (5) são invertidas neste intervalo, isto é,

$$X < X^2 < X^3 < X^4 < \cdots < X^{n-1} < X^n < \cdots \quad \text{quando } X > 1 \tag{6}$$

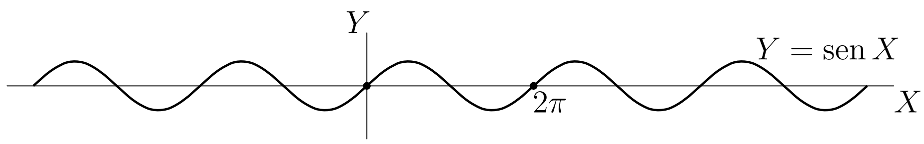
Estas desigualdades podem ser observadas no próximo gráfico. Nele estão representadas as partes dos gráficos das funções $a(X) = X$, em linha pontilhadas, $b(X) = X^2$, em linha com espessura fina, $c(X) = X^3$, em linha com espessura intermediária, e $d(X) = X^4$, em linha com espessuma grossa, que estão contidos no quadrado com vértices nos pontos $(0,0), (0,2), (2,2)$ e $(2,0)$



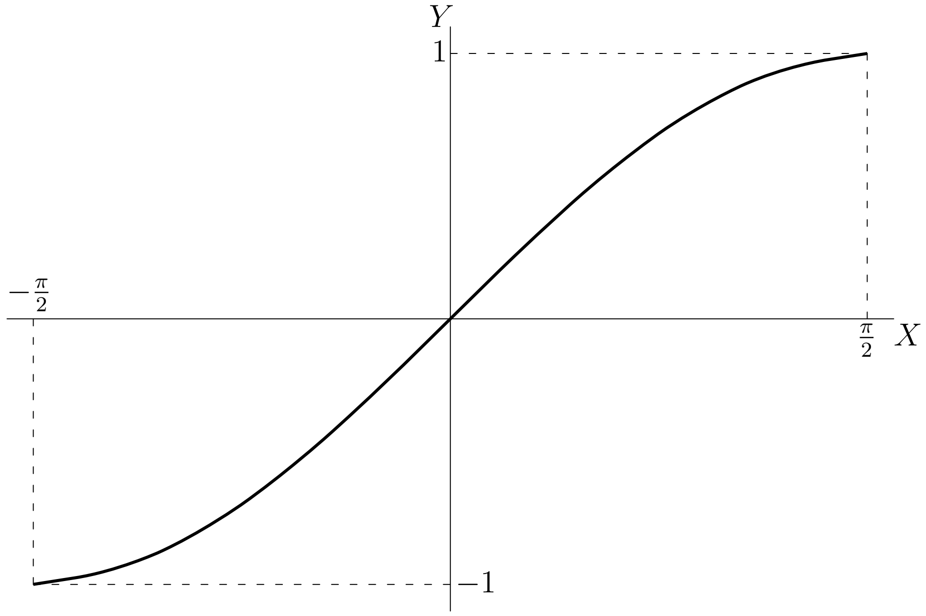
Exercício 3. *Encontre a equação da reta tangente e da reta normal à curva de equação* $Y = \sqrt[3]{7 + \cos X}$ *no ponto de coordenadas* $(0, 2)$.

3. A função arco-seno

A seguir apresentamos o gráfico da função seno.



Esta função não é injetiva nem sobrejetiva. Ao restringirmos o contra-domínio da função seno a sua imagem, que é o intervalo $[-1, 1]$, transformamos o seno em uma função sobrejetiva. Necessitamos restringir também o domínio para que o seno seja também uma função injetiva. Temos várias escolhas para esta restrição. Iremos adotar o invervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Portanto, a função $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ dada por $f(X) = \operatorname{sen} X$ é bijetiva. Chamaremos esta função de **seno restrito**. A seguir apresentamos o gráfico desta função.



Como f é uma bijeção, f possui uma função inversa g, cujo domínio é $[-1,1]$ e contra-domínio é $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Denotamos $g(X)$ por $\operatorname{arcsen} X$. Isto é, $\operatorname{arcsen} X$ é o arco, pertencente ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, cujo seno é igual à X.

Regra 4. *Se* $g(X) = \operatorname{arcsen} X$*, então*

$$g'(X) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

Seja f como descrita no parágrafo anterior. Como f é a inversa de g, temos que

$$f(g(X)) = X$$

Substituindo a expressão de f nesta identidade, temos que

$$\operatorname{sen}(g(X)) = X$$

Pela regra da cadeia, ao derivarmos esta expressão, obtemos

$$\cos(g(X))g'(X) = 1 \tag{7}$$

Para a obtenção da derivada de g, necessitamos substituir $\cos(g(X))$ por uma expressão envolvendo apenas X. Para tanto utilizamos a seguinte relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(g(X)) + \cos^2(g(X)) = 1$$

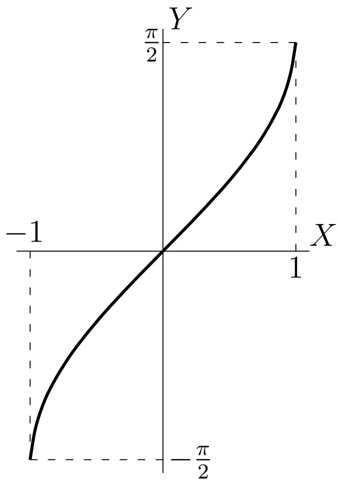
Como $\operatorname{sen}(g(X)) = X$, concluímos que

$$\cos(g(X)) = \sqrt{1-X^2} \tag{8}$$

(Para concluir que o sinal, após a extração da raiz quadrada, é positivo use o fato que $g(X)$ pertence ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ e que neste intevalo o cosseno é positivo.) Substituindo (8) em (7), estabelecemos que

$$g'(X) = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

Abaixo apresentamos o gráfico da função arco-seno. É o simétrico do gráfico da função seno restrito, que foi apresentado na figura anterior, com relação a reta de equação $Y = X$.



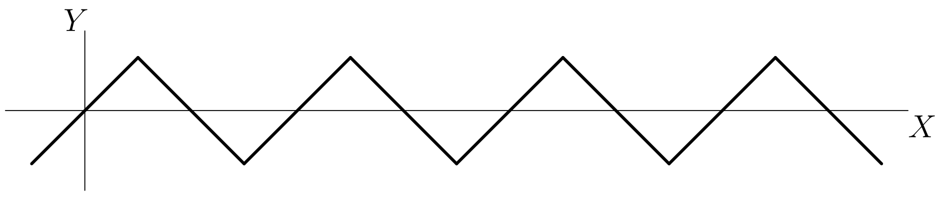
Exercício 5. *Considere a seguinte função*

$$f(X) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{X^2-1}{X^2+1}\right)$$

(i) *Determine o domínio e a imagem de f.*
(ii) *Calcule a derivada de f.*
(iii) *Ache a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$.*

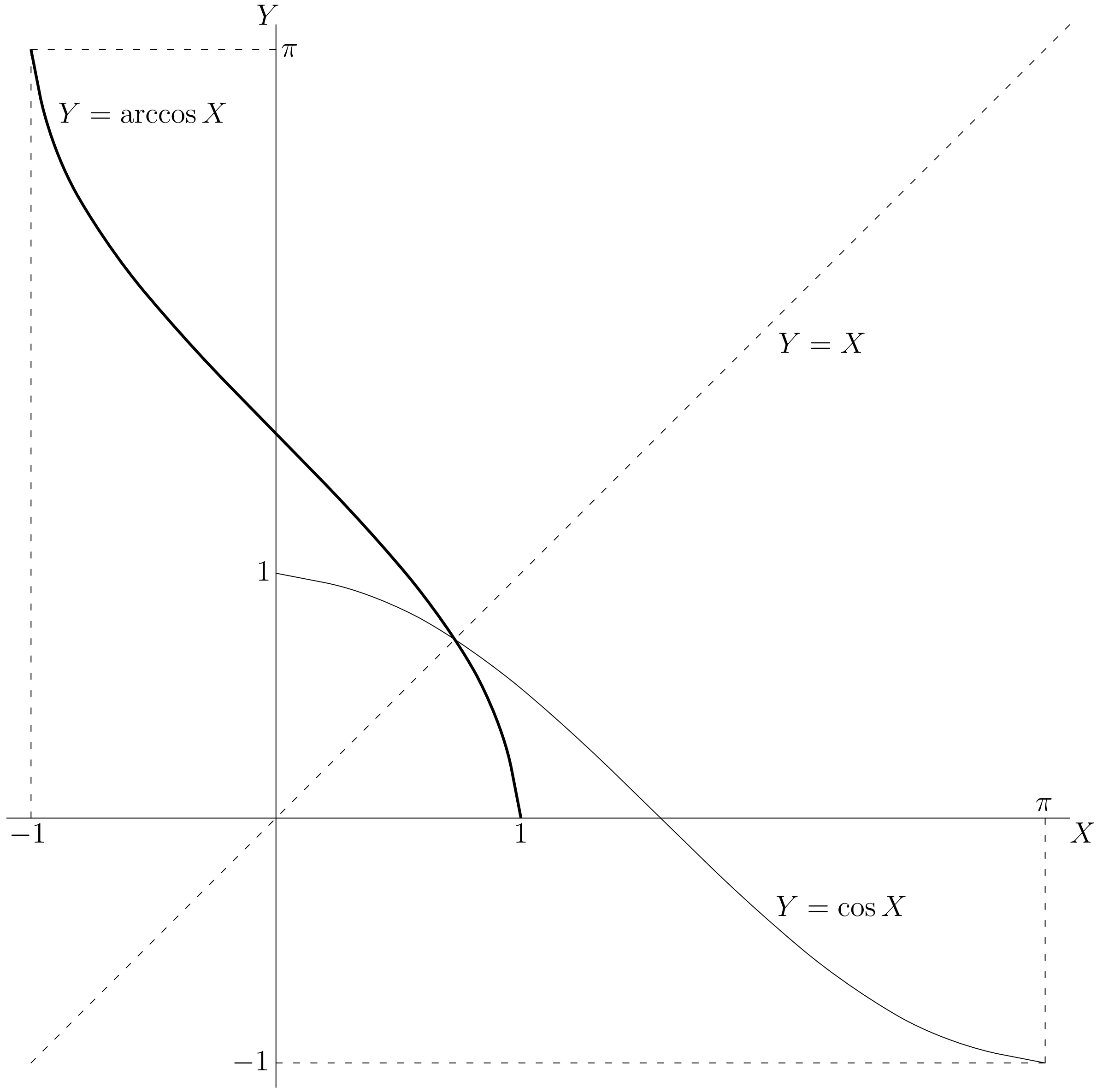
Exercício 6. *Sobre a função dada por $f(X) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} X)$, quais das seguintes afirmações a seguir são verdadeiras?*

(i) *O maior domínio de definição de f é igual a $\mathbb{R}$.*
(ii) *Para o maior domínio de definição de f, a imagem de f é igual a $\mathbb{R}$.*
(iii) *Para todo X em $\mathbb{R}$, temos que $f(X) = X$.*
(iv) *O período de f é 2π.*
(v) *O gráfico de f, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}\right]$, está representado na próxima figura.*



4. A função arco-cosseno

A função cosseno não é bijetiva. Por este motivo não tem inversa. Podemos restringir o domínio e o contra-domínio desta função de forma que passe a ser bijetiva e conseqüentemente tenha inversa. Note que a função $f : [0, \pi] \to [-1, 1]$ dada por $f(X) = \cos X$ é bijetiva. Chamaremos esta função de **cosseno restrito**. Logo possui uma função inversa $g : [-1.1] \to [0, \pi]$ que é conhecida como a **função arco-cosseno**. Denotamos $g(X)$ por $\arccos X$ porque $g(X)$ é o arco, entre 0 e π, cujo cosseno é X. Na figura seguinte representamos as funções cosseno restrito, com tracejado fino, e arco-cosseno, com tracejado grosso.



Regra 7. *Se* $g(X) = \arccos X$, *então*

$$g'(X) = -\frac{1}{\sqrt{1-X^2}}$$

Pela definição de arco-cosseno, obtemos que

$$\cos(g(X)) = X$$

Pela regra da cadeia, ao derivarmos esta expressão, obtemos

$$-\operatorname{sen}(g(X))g'(X) = 1 \tag{9}$$

Para a obtenção da derivada de g, necessitamos substituir $\operatorname{sen}(g(X))$ por uma expressão envolvendo apenas X. Para tanto utilizamos a seguinte relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2(g(X)) + \cos^2(g(X)) = 1$$

Como $\cos(g(X)) = X$, concluímos que

$$\operatorname{sen}(g(X)) = \sqrt{1-X^2} \tag{10}$$

(Para concluir que o sinal, após a extração da raiz quadrada, é positivo use o fato que $g(X)$ pertence ao intervalo $[0, \pi]$ e que neste intevalo o seno é positivo.) Substituindo (9) em (10), temos que

$$g'(X) = -\frac{1}{\sqrt{1 - X^2}}$$

Exemplo 8. *Para a função dada pela expressão*

$$r(X) = \operatorname{arcsen} X + \arccos X$$

(i) *Determine o maior domínio de definição de* r.
(ii) *Encontre os valores de* r *em* $-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$
(iii) *Calcule a derivada de* r.
(iv) *Ache a equação da reta normal ao gráfico de* r *no ponto de abscissa* $\frac{1}{3}$.

Como o domínio para as funções arco-seno e arco-cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, o domínio da soma destas duas funções também é este intervalo, isto é, o maior domínio de definição para r é o intervalo $[-1, 1]$, que é a resposta de (i). Antes de responder (ii), vamos responder (iii). Pelas Regras 4 e 7,

$$r'(X) = \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} = 0$$

Em particular, $r(X)$ é uma função constante. Portanto, para todo X em $[-1, 1]$, temos que

$$r(X) = r(0) = \operatorname{arcsen} 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

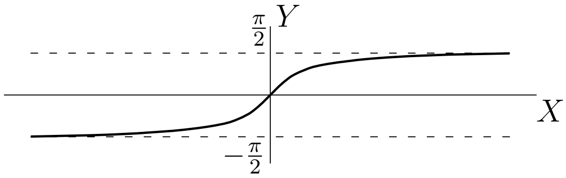
Conseqüentemente r assume o mesmo valor em todos os números listados em (ii) que é $\frac{\pi}{2}$. Como $r'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, a reta normal ao gráfico de r no ponto de abscissa $\frac{1}{3}$ é vertical e conseqüentemente possui equação igual a $X = \frac{1}{3}$.

Na solução do segundo item do exemplo anterior utilizamos o seguinte fato: se a derivada de uma função r é sempre igual a 0 em um intervalo, então, neste intervalo, a função r é constante. Estabelecemos este fato utilizando uma interpretação oriunda da física da derivada.

Assuma que $r(X)$ é a posição de uma partícula em um eixo ordenado no instante de tempo X. Neste caso $r'(X)$ é a velocidade instantânea da partícula no instante X. Caso esta derivada seja sempre 0, concluímos que a velocidade instantânea desta partícula é sempre nula e portanto a partícula não se move. Isto é, ocupa a mesma posição e daí $r(X)$ não muda. Logo é constante.

5. A função arco-tangente

A definição da função arco-tangente é similiar a das arco-seno e arco-cosseno. Seremos breve. A função $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por $f(X) = \operatorname{tg} X$ é uma bijeção. Portanto, f possui uma função inversa $g : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, conhecida como **arco-tangente**. Denotamos $g(X)$ por $\operatorname{arctg} X$. O gráfico da arco-tangente é representado na próxima figura.



Regra 9. *Se* $g(X) = \operatorname{arctg} X$*, então*

$$g'(X) = \frac{1}{X^2+1}$$

Seja f como descrita po parágrafo anterior. Como f é a inversa de g, temos que

$$f(g(X)) = X$$

Substituindo a expressão de f nesta identidade, temos que

$$\operatorname{tg}(g(X)) = X$$

Pela regra da cadeia, ao derivarmos esta expressão, obtemos

$$\sec^2(g(X))g'(X) = 1 \tag{11}$$

Para a obtenção da derivada de g, necessitamos substituir $\sec(g(X))$ por uma expressão envolvendo apenas X. Para tanto utilizamos a seguinte relação fundamental

$$\sec^2(g(X)) = \operatorname{tg}^2(g(X)) + 1$$

Como $\operatorname{tg}(g(X)) = X$, concluímos que

$$\sec^2(g(X)) = X^2 + 1 \tag{12}$$

Substituindo (11) em (12), chegamos à

$$g'(X) = \frac{1}{X^2+1}$$

Exercício 10. *Considere a função bijetiva* $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(X) = \operatorname{cotg} X$*. Para a inversa* g *de* f*, estabeleça que*

$$g'(X) = -\frac{1}{X^2+1}$$

A função g *é conhecida como a arco-cotangente e o valor de* g *em* X *é denotado por* $\operatorname{arcotg} X$*.*

Exercício 11. *Mostre que, para todo número real* X*,*

$$\operatorname{arctg} X + \operatorname{arcotg} X = \frac{\pi}{2}$$

Utilizando esta identidade e o gráfico da arco-tangente, esboce o gráfico da arco-cotangente.

Exercício 12. *Calcule a derivada da seguinte função*

$$f(X) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X-1}{X+1}\right)$$

6. A função arco-secante

A função $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 1\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ dada por $f(X) = \sec X$ é bijetiva. Portanto, f possui uma função inversa $g : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, 1\right]$, conhecida como **arco-secante**. Denotamos $g(X)$ por $\operatorname{arcsec} X$.

Regra 13. *Se* $g(X) = \operatorname{arcsec} X$*, então*

$$g'(X) = \frac{1}{|X|\sqrt{X^2-1}}$$

Por definição, temos que

$$\sec(g(X)) = X \tag{13}$$

Pela regra da cadeia, ao derivarmos esta expressão, obtemos

$$\operatorname{tg}(g(X))\sec(g(X))g'(X) = 1 \tag{14}$$

Para a obtenção da derivada de g, necessitamos substituir $\operatorname{tg}(g(X))$ por uma expressão envolvendo apenas X. Para tanto utilizamos a seguinte relação fundamental

$$\sec^2(g(X)) = \operatorname{tg}^2(g(X)) + 1$$

Como $\sec(g(X)) = X$, concluímos que

$$\operatorname{tg}^2(g(X)) = X^2 - 1$$

Extraindo a raiz quadrada, chegamos à

$$\operatorname{tg}(g(X)) = \begin{cases} \sqrt{X^2-1} & \text{quando } X \geq 1 \\ -\sqrt{X^2-1} & \text{quando } X \leq -1 \end{cases} \tag{15}$$

porque a tangente é não-negativa no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e não-positiva no intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right]$. Substituindo (13) e (14) em (15), concluímos que

$$g'(X) = \begin{cases} \frac{1}{X\sqrt{X^2-1}} & \text{quando } X \geq 1 \\ -\frac{1}{X\sqrt{X^2-1}} & \text{quando } X \leq -1 \end{cases}$$

Portanto, a regra segue pois, quando $X < 0$,

$$-\frac{1}{X\sqrt{X^2-1}} = \frac{1}{(-X)\sqrt{X^2-1}} = \frac{1}{|X|\sqrt{X^2-1}}$$

Exercício 14. *Esboce o gráfico da função arco-secante.*

Exercício 15. *Sabendo que o contra-domínio da função arco-cossecante é igual à* $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$*, determine a sua derivada.*

Exercício 16. *Caso exista, encontre o número real* γ *tal que*

$$\operatorname{arcsec} X + \operatorname{arcossec} X = \gamma$$

seja válida para todo X *pertencente ao conjunto* $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$*. (Usamos* $\operatorname{arcossec} X$ *para denotar o arco-cossecante de* X*.)*

7. Respostas dos exercícios

1. (i) V (ii) F (iii) V (iv) V **3.** $Y = 2$ (tangente) e $X = 0$ (normal) **5.** (i) $\mathbb{R}$ (domínio) e $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (imagem) (ii) $\frac{2X}{(X^2+1)|X|}$ (iii) não existem **6.** (i) V (ii) F (iii) F (iv) V (v) V **12.** $\frac{1}{X^2+1}$ para $X \neq -1$ **16.** $\frac{\pi}{2}$

Conteúdo da oitava aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos